1	2	3	4	Calificación

Apellido y Nombre:
No.de libreta:

Ecuaciones Diferenciales A y B

Primer Parcial 21/10/15

1. Sea L el operador definido por $Lu = (-pu')' + qu$, con $0 < p \in C^1([a,b])$, $0 \leq q \in C([a,b])$. Probar que

a) $L : H^2 \cap H_0^1(a,b) \to L^2(a,b)$ es un isomorfismo (es decir, L es biyectiva, continua y L^-1 es continua).

b) Si G es la función de Green asociada a L, y u_n es la n-ésima autofunción de L con autovalor λ_n, entonces
$$G(x,y) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} u_n(x) u_n(y).$$

c) Calcular
$$\sum_{n \geq 1} \frac{sen(nx)sen(ny)}{n^2}.$$

2. *a*) Encontrar los puntos críticos del funcional
$$\int_0^\alpha \left((y')^2 - y^2 - 6ysen(2x)\right) dx$$
con condiciones de borde $y(0) = 0$, $y(\alpha) = A$.

b) Probar que si α es suficientemente pequeño, entonces el punto crítico obtenido en a) es un mínimo. Calcular α explícitamente.

3. *a*) Resolver
$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{x^2+1} u_x = 0 & x, t > 0 \\ u(0,t) = g(t), \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$
Dar condiciones sobre g y f para que la solución resulte de clase C^1.

b) Si tenemos el problema anterior pero
$$u_t + \frac{1}{1+x^2} u_x = u,$$
¿puede existir una solución de clase C^1? ¿Y sólo continua?

4. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, acotado y conexo de frontera C^1, $\beta > 0$ es una constante y $f \in L^2(\Omega)$. Hallar la formulación débil del siguiente problema con condiciones de Robin
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$
y probar que existe una única solución débil. Probar que si u es regular, es solución clásica si y sólo si es solución débil.

Sugerencia: pensar por qué tiene sentido la formulación débil en $H^1(\Omega)$.

Soluciones:

1.

1. Acá teníamos que ver que $L : \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b]) \to \mathbb{L}^2([a,b])$ era biyectiva, continua y con inversa continua.

   - **Biyectiva** Aquí había varias maneras pero lo crucial era notar que L era biyectiva sii dada $f \in \mathbb{L}^2([a,b])$ $\exists! u \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ tal que $L(u) = f$

     a) <u>Forma 1:</u> Usando Lax-Milgram: Aquí sea $v \in \mathbb{C}_0^\infty(a,b)$ multiplicamos por v a $L(u) = f$ e integramos en $[a,b]$, nos queda:

     $$\int_a^b (-pu')'v + quvdx = (-pu'v)\Big|_a^b - \int_a^b (-pu')v'dx + \int_a^b quvdx$$

     (Usamos partes) Como $(-pu'v)\Big|_a^b = 0$ pues v tiene soporte compacto, nos queda:

     $$\int_a^b (-pu')'v + quvdx = \int_a^b (pu'v' + quv)dx := a(u,v)$$

     Ahora sea $\bar{v} \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ yo se que $\exists \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_0^\infty(a,b)$ tal que $v_n \to v$ en $\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ pues $[a,b]$ es abierto, acotado, conexo y de frontera C^1, entonces como $\mathbb{H}_0^1([a,b])$ es cerrado en $\mathbb{H}^2([a,b])$ y ambos son Hilbert tenemos que $\|.\|_{\mathbb{H}^2\cap\mathbb{H}_0^1([a,b])} \simeq \|.\|_{\mathbb{H}_0^1([a,b])}$ Por ende tenemos que $v_n \to v$ en L^2 y $v_n' \to v'$ en L^2 Con todo esto, como $p, p', q \in \mathbb{L}^\infty((a,b))$ pues son continuas en un compacto y por el Lema que demostro Pau en la práctica tenemos que $\int_a^b (pu'v_n' + quv_n)\, dx \to \int_a^b (pu'v' + quv)dx$ y tengo definida una $a : \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b]) \times \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ forma bilineal Ahora veamos la continuidad de a:

     $$|a(u,v)| \leq \int_a^b \left(|p||u'||v'| + |q||v||u|\right) dx$$

     $$|a(u,v)| \leq \|p\|_{L^\infty}\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|q\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C\|u\|_{\mathbb{H}_0^1}\|v\|_{\mathbb{H}_0^1}$$

     Donde la última desigualdad es debido a la práctica.
     Ahora veamos que a es coersiva:
     Como $p > 0$ en $[a,b]$ y $[a,b]$ es compacto entonces $min\ p > 0$, además $\int_a^b quu \geq 0$ entonces

     $$a(u,u) \geq min\ p \int_a^b u'^2 \geq C\|u\|_{\mathbb{H}_0^1}^2$$

     con $C > 0$
     Entonces por Lax-Milgram $\exists! u \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ / $a(u,v) = \int_a^b fv\ \forall v \in \mathbb{H}_0^1$
     Entonces como $C_0^\infty([a,b]) \subseteq \mathbb{H}_0^1([a,b])$ sea $v \in C_0^\infty([a,b])$

     $$\int_a^b fv = a(u,v) = \int_a^b pu'v' + quv = \int_a^b \left(\left(-pu'\right)' + qu\right) v$$

     Y como eso vale $\forall v \in C_0^\infty([a,b])$ por densidad concluimos la biyectividad de L.

     b) <u>Forma 2:</u> Viendo positividad y usando Green:
     Acá se podía usar que como $\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ es Hilbert y ya sabemos la existencia y unicidad de la función de Green allí, tenemos que $\bar{u} = G * f$ cumple que $L(\bar{u}) = f$, pero hay que checkear que $\bar{u} \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ Esto es simple pues la función de Green de un operador de Strum-Louville es C^2 a trozos y por ende, como por la práctica $D^\alpha(G * f) = (D^\alpha(G)) * f$ para todo multiíndice α para las derivadas d"ebiles. Entonces $\bar{u} \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}^1([a,b])$. Además como G cumple las condicinoes

de contorno de L por definición, entonces automáticamente $\bar{u}$ las va a cumplir y entonces efectivamente $\bar{u} \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$. O sea que L es sobreyectiva.
Ahora como $q \geq 0$ y $p > 0$ sabemos por el ejercicio 5 de la práctica 2 que los autovalores de L son positivos y los autoespacios tienen dimensión 1. Entonces:

$$\langle Lu_k, u_k \rangle_{L^2} = \lambda_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \{u_k\} \text{ autofunciones.}$$

Luego dada $u \in L^2([a,b])$ $\exists \alpha_k \in \mathbb{K}$ / $u =_{L^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k$. Sea $\bar{u}_j$ la suma hasta $k = j$, entonces lo anterior dice que $\bar{u}_j \to u$ en L^2. Notemos que:

$$\langle L\bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle_{L^2} = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k^2 \left(\langle Lu_k, u_k \rangle \right) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k^2 \lambda_k > 0 \quad \{u_k\} \text{ autofunciones.}$$

Donde usamos que L es un operador lineal y que el producto interno es bilineal (en realidad usamos linealidad de la primera coordenada no más). Ahora como $\langle ., . \rangle$ es continuo como forma bilineal de L^2 y L es continuo en L^2 y la restriccion a $\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b]$ es continua, tenemos que $\langle L\bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle \to \langle Lu, u \rangle$ en L^2 y entonces $\langle Lu, u \rangle \geq liminf \langle L\bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle > 0$. Ahora como toque de gracia, como L es de Sturm Louville Pablo probó que en realidad $u_k \in C^2([a,b])$ a trozos y entonces como $\{\bar{u_k}\} = L^2$ entonces en particular juntando todo $\overline{\bar{u_k}}_{k \in \mathbb{N}}^{\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1} = \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1([a,b])$ y entonces L es un operador positivo, en particular inyectivo.

- **Continuidad**:

$$\|Lu\|_{L2} = \| \left(-pu'\right)' + qu\|_{L^2} = \| -pu'' - p'u' + qu\|_{L^2}$$

$$\|Lu\|_{L2} \leq \|p'\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} + \|p\|_{L^\infty} \|u''\|_{L^2} + \|q\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}$$

$$\|Lu\|_{L2} \leq C\|u\|_{\mathbb{H}^2} \leq CD\|u\|_{\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1},$$

con $C = \ max\{p, p', q\} > 0$ pues $[a,b]$ es compacto y son continuas y $D > 0$ es la constante de la equivalencia de normas de $\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1$ y $\mathbb{H}_0^1$.

- **Continuidad de la inversa**:

  a) <u>Forma 1</u> Usando el teo de la aplicación abierta: Como L es continua y sobreyectiva de un Hilbert a otro Hilbert, entonces es abierta. Como es continua, abierta y sobreyectiva entre dos Banach, por el teorema de la aplicación abierta, L^{-1} es continua.

  b) <u>Forma 2</u> A mano:

$$\|L^{-1}(f)\|_{\mathbb{H}^2 \cap \mathbb{H}_0^1} \leq C\|G' * f\|_{L^2} \leq C\|G'\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2} \leq CD\|f\|_{L^2}$$

  Donde la primera desigualdad es por la equivalencia de normas usual para usar la de H_0^1, más la equivalencia del ej 8 de la práctica 5. Como $G \in C^1$ a trozos en un compacto, la derivada débil es la clásica ctp y están acotadas por su máximo, entonces en la segunda desigualdad usamos Young.

2. Como los $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son una base ortonormal de L^2 y para cada $x \in (a,b)$ fijo $G_x \in L^2$ entonces:

$$G_x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x) u_k(y)$$

con $\alpha_k = \langle G_x, u_k \rangle = \int_a^b G_x(y) u_k(y) dy = \frac{u_k(y)}{\lambda_k}$, pues G es función de Green para L y $Lu_k = \lambda_k u_k$ Entonces $G_x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k}$.

3. Aquí era simplemente usar b) y hallar la función de Green que tenga como autovalores $\lambda_n = n^2$ y autofunciones $u_n = \sin(nx)$, o sea el operador $L = -\partial_{xx}$ en $[0, \pi]$.

2.

1. Sea
$$L(y, y', x) = (y')^2 - y^2 - 6y\sin(2x).$$
Como $L \in C^1$, podemos hallar sus extremales a través de la siguiente ecuación de Euler-Lagrange:
$$L_y - \frac{d}{dt}(L_{y'}) = 0,$$
es decir
$$y'' + y' = -3\sin(2x). \tag{1}$$
Resolvemos (1) como en Análisis II, primero buscamos soluciones del sistema homogéneo $y'' + y = 0$, obtenemos
$$y_H = a\sin x + b\cos x.$$
Luego hallamos una solución particular de la ecuación: $y'' + y = -3\sin(2x)$, observemos que 'a ojo'podemos ver que
$$y_P = \sin(2x)$$
es una solución particular.

Luego, una solución de (1) es de la forma
$$y(x) = a\sin x + b\cos x + \sin(2x).$$
Ahora, ajustemos las constantes para que se satisfagan las condiciones $y(0) = 0$, $y(\alpha) = A$.
$$0 = y(0) = a\sin 0 + b\cos 0 + \sin 0 = b,$$
luego $b = 0$. Por otro lado:
$$A = y(\alpha) = a\sin\alpha + \sin(2\alpha),$$
acá tenemos que tener un poco de cuidado!! Si $\alpha \neq k\pi$, para algún $k \in \mathbb{N}$, nos queda
$$a = \frac{A - \sin(2\alpha)}{\sin\alpha},$$
pero si $\alpha = k\pi$, nos queda $A = 0$. Luego, el extremal de $\int_0^\alpha L(y, y', x)dx$ es
$$\begin{cases} y(x) = \frac{A - \sin(2\alpha)}{\sin\alpha}\sin x + \sin(2x), & \text{si } \alpha \neq k\pi. \\ y(x) = a\sin x + \sin(2x), & \text{si } \alpha = k\pi. \end{cases}$$

2. Para justificar que el extremal hallado en el ítem anterior es un máximo, consideramos, para $\varphi \in C_0^\infty([0, \alpha])$, la función
$$I(t) = J(y + t\varphi) = \int_0^\alpha ((y + t\varphi)')^2 - (y + t\varphi)^2 - 6(y + t\varphi)\sin(2x))dx.$$
El extremal y es un mínimo de J si $I''(0) > 0$, para toda $\varphi \in C_0^\infty([0, \alpha])$.
$$I'(t) = \int_0^\alpha (2(y' + t\varphi')\varphi' - 2(y + t\varphi)\varphi - 6\varphi\sin(2x))dx,$$
Luego
$$I''(0) = I''(t) = \int_0^\alpha (2(\varphi')^2 - 2\varphi^2)dx.$$

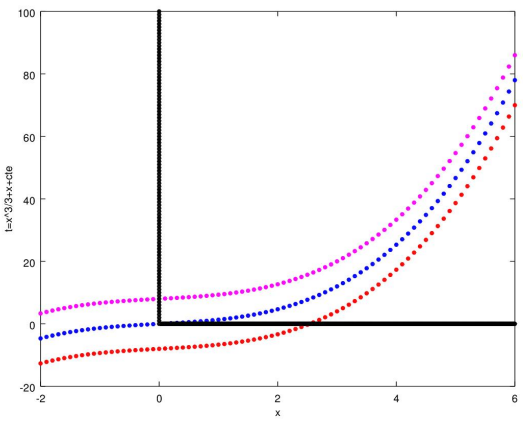

Figura 1: Tres curvas características donde la función permanece constante.

Por lo tanto, $I''(0) > 0$ si y sólo si $\int_0^\alpha (\varphi')^2 dx > \int_0^\alpha \varphi^2 dx$, para toda $\varphi \in C_0^\infty([0,\alpha])$, es decir, si

$$\|\varphi'\|_{L^2}^2 > \|\varphi\|_{L^2}^2.$$

Observemos que como $\varphi \in C_0^\infty([0,\alpha])$, podemos aplicar de desigualdad de Poincaré, tenemos que

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq \sqrt{C}\|\varphi'\|_{L^2}^2 < \|\varphi'\|_{L^2}^2,$$

si tomamos $\sqrt{C} < 1$, recordemos que la constante óptima para la desigualdad de Poncaré en el intervalo $[0,\alpha]$ es $C = \frac{\alpha}{\pi}$.

Luego, podemos asegurar que el extremal es un mínimo si pedimos $0 < \alpha < \pi$.

3.

La función a estudiar es $F(u_x, u_t, u, x, t) = u_t + \frac{1}{x^2+1}u_x = 0$. Usando el método de las características[1] sabemos que

$$\begin{aligned}
(\dot{x}(s), \dot{t}(s)) &= \left(\frac{1}{x^2+1}, 1\right) \\
\dot{z}(s) &= \left(\frac{1}{x^2+1}, 1\right) \cdot (u_x, u_t) = 0
\end{aligned}$$

Podemos deducir las curvas caraterísticas donde la función u permanece constante son las curvas de nivel. Así resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}x &= \frac{1}{x^2+1} \text{ entonces} \\
\int x^2 + 1 dx &= \int ds = s + cte \text{ es decir} \\
x^3/3 + x &= s + cte
\end{aligned}$$

Dado que $t(s) = s + cte$; u resulta constante en las curvas

$$x^3/3 + x + cte - t = 0.$$

[1] Ver el libro de Evans en la sección 3.2.

Estas son de la forma que se ve en el gráfico 1. Si notamos

$$h(x,t) = t - x^3/3 - x + cte$$

resulta que por el teorema de la función implícita (dado que $D_t h = 1$ es invertible) vemos que estas curvas están bien definidas, no se intersecan y cubren todo el cuadrante; debemos distinguir los casos donde cortan a la función g de los que corta f. En el primero, la u vale igual a cuando la curva atraviesa el eje $t > 0$. Entonces si $cte \geq 0$,

$$u(x,t) \quad = \quad u(x, x^3/3 + x + cte) = u(0, cte) = g(cte).$$

En el segundo caso, dado que el discriminante es negativo, sabemos que existe una única raíz real de la ecuación $x^3/3 + x + cte = t$. Llamemos $\Re(cte)$ a este valor, es decir,

$$\Re(cte)^3/3 + \Re(cte) + cte = 0.$$

Con lo cual u queda definida

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x, x^3/3 + x + cte) = u(\Re(cte), 0) = f(\Re(cte)) \\ &= f(\Re(t - x^3 - x)). \end{aligned}$$

Entonces

$$u(x,t) = \begin{cases} g(t - x^3/3 - x) \text{ si } t - x^3/3 - x \geq 0 \\ f(\Re(t - x^3 - x)) \text{ si no.} \end{cases}$$

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis. Primero calculemos la derivada de $\Re$.

$$\begin{aligned} \Re(z)^3/3 + \Re(z) + z &= 0 \text{ derivemos respecto de } z \\ \Re(z)^2 \dot{\Re}(z) + \dot{\Re}(z) + 1 &= 0 \\ \dot{\Re}(z)(\Re(z)^2 + 1) &= -1 \\ \dot{\Re}(z) &= \frac{-1}{\Re(z)^2 + 1} \text{ en particular} \\ \dot{\Re}(0) &= \frac{-1}{\Re(0)^2 + 1} = -1 \end{aligned}$$

Para continuar supongamos que $t - x^3/3 - x \geq 0$. Luego

$$\begin{aligned} u_x &= \dot{g}\ (-x^2 - 1) \\ u_t &= \dot{g} \\ \text{así } u_x \frac{1}{x^2+1} + u_t &= \dot{g} \frac{-x^2 - x}{x^2 + 1} + \dot{g} = 0 \end{aligned}$$

y en el otro caso

$$\begin{aligned} u_x &= \dot{f}\ \dot{\Re}\ (-x^2 - 1) \\ u_t &= \dot{f}\ \dot{\Re} \\ \text{así } u_x \frac{1}{x^2+1} + u_t &= \dot{f}\ \dot{\Re}\ \frac{-x^2 - x}{x^2 + 1} + \dot{f}\ \dot{\Re} = 0 \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} u(0,t) &= g(t - 0^3/3 - 0) = g(t) \\ u(x_0, 0) &= f(\Re(0 - x_0^3/3 - x_0)) \end{aligned}$$

donde $\Re(-x_0^3/3 - x_0)$ es raíz de $x^3/3 + x - x_0^3/3 - x_0$ y, por lo tanto:

$$u(x_0, 0) = f(\Re(0 - x_0^3/3 - x_0)) = f(x_0)$$

como queríamos.

Entonces, ¿qué condiciones pedimos a f y g? Para la continuidad de la función, debe suceder que valga lo mismo en la curva

$$x^3/3 + x = t$$

que son los valores que corresponden a $f(0)$ y $g(0)$. Así pedimos que

$$f(0) = g(0).$$

Además para la continuidad de la derivada necesitamos sobre la curva de nivel[2]

$$\begin{aligned} \lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_t(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_t(x,t) \text{ y} \\ \lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_x(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_x(x,t). \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_t(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_t(x,t) = \\ \lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} \dot{g}(t - x^3/3 - x) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} \dot{f}(\Re(t - x^3/3 - x))\ \dot{\Re}(t - x^3/3 - x) \\ \dot{g}(0) &= \dot{f}(\Re(0))\ \dot{\Re}(0) = \dot{f}(0)(-1) \\ \dot{g}(0) &= -\dot{f}(0). \end{aligned}$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_x(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_x(x,t) = \\ \lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} \dot{g}\ (-x^2 - x) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} \dot{f}\ \dot{\Re}\ (-x^2 - x) \\ \dot{g}(0) &= \dot{f}(\Re(0))\ \dot{\Re}(0) = \dot{f}(0)(-1) \\ \dot{g}(0) &= -\dot{f}(0) \end{aligned}$$

que es lo mismo que antes. Con lo cual, resumiendo, debemos pedir que $f,\ g \in C^1$, $f(0) = g(0)$ y $-\dot{f}(0) = \dot{g}(0)$.

Para la siguiente parte, tenemos $\tilde{F}(u_x, u_t, u, x, t) = u_t + \frac{1}{x^2+1} u_x - u = 0$. Ahora resulta que $\dot{z} = z$, entonces

$$z(s) = e^s z(0).$$

Ahora tenemos que si $t - x^3/3 - x = cte > 0$ resulta que

$$u(x,t) = u(x, x^3/3 + x + cte) = e^{x^3/3+x} u(0, cte) = e^{x^3/3+x} g(t - x^3/3 - x).$$

De igual forma, si $t - x^3/3 - x = cte \leq 0$,

$$u(x,t) = e^t f(\Re(t - x^3/3 - x)).$$

Con lo cual resulta que

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{x^3/3+x} g(t - x^3/3 - x) \text{ si } t - x^3/3 - x \geq 0 \\ e^t f(\Re(t - x^3 - x)) \text{ si no.} \end{cases}$$

[2]Notar que sobre esta curva vale la igualdad $t - x^3/3 - x = 0$ que implica $x_0^3/3 + x_0 = t_0$.

Nuevamente tenemos que analizar dos casos, empecemos por $t - x^3/3 - x \geq 0$

$$\begin{aligned}
u_x &= e^{x^3/3+x}\dot{g}\ (-x^2-1) + e^{x^3/3+x}(x^2+1)\ g \\
u_t &= e^{x^3/3+x}\dot{g} \\
\text{así } u_x\frac{1}{x^2+1} + u_t &= e^{x^3/3+x}(-\dot{g}+g)\frac{x^2+x}{x^2+1} + e^{x^3/3+x}\dot{g} = e^{x^3/3+x}g \\
\text{y si } t - x^3/3 - x < 0 & \\
u_x &= e^t\dot{f}\ \dot{\Re}\ (-x^2-1) \\
u_t &= e^t(\dot{f}\ \dot{\Re} + f) \\
u_x\frac{1}{x^2+1} + u_t &= e^t\dot{f}\ \dot{\Re}\ \frac{-x^2-x}{x^2+1} + e^t(\dot{f}\ \dot{\Re} + f) = e^t f(\Re(t - x^3 - x))
\end{aligned}$$

como queríamos. Para la continuidad estudiemos

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_t(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_t(x,t) \text{ y} \\
\lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_x(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_x(x,t).
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_t(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_t(x,t) = \\
\lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} e^{x_0^3/3+x_0}\dot{g} &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} e^{t_0}(\dot{f}\ \dot{\Re} + f) \\
e^{x_0^3/3+x_0}\dot{g}(0) &= e^{t_0}(\dot{f}(\Re(0))\ \dot{\Re}(0) + f(0)) \\
e^{t_0}\dot{g}(0) &= e^{t_0}(-\dot{f}(0) + f(0)).
\end{aligned}$$

Pero por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} u_x(x,t) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} u_x(x,t) = \\
\lim_{(x,t)\to(x_0^+,t_0^-)} e^{x_0^3+x_0}(-\dot{g}+g)(x^2+x) &= \lim_{(x,t)\to(x_0^-,t_0^+)} e^{t_0}\dot{f}\ \dot{\Re}\ (-x^2-x) \\
e^{t_0}(-\dot{g}(0)+g(0))(x_0^2+1) &= e^{t_0}\dot{f}(\Re(0))\ \dot{\Re}(0)(x_0^2+1) \\
e^{t_0}(-\dot{g}(0)+g(0))(x_0^2+1) &= e^{t_0}\dot{f}(0)\ (-1)(x_0^2+1)
\end{aligned}$$

Entonces las condiciones que debemos pedir para que resulte de clase C^1 son f y $g \in C^1$; $g(0) = f(0)$ y $g(0) - \dot{g}(0) = \dot{f}(0)$.

4.

Buscamos la formulación débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ para poder aplicar las Fórmulas de Green. Multiplicamos la ecuación por $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e integramos sobre Ω:

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx.$$

Por un lado, como u, φ y Ω cumplen las hipótesis, podemos aplicar la Fórmula de Green, obtenemos

$$-\int_\Omega \Delta u \varphi dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Por otro lado, si u es solución de (2), tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\beta u, \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Luego, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \beta \int_{\partial\Omega} \varphi u dS = \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Veamos que la siguiente formulación

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\partial\Omega} u v dS = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

es equivalente a (2) si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

<u>(2) $\Rightarrow$ (3)</u>: Ya sabíamos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \beta \int_{\partial\Omega} \varphi u dS = \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),$$

en particular, vale para $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Sea $v \in H^1(\Omega)$, como Ω es acotado y de frontera C^1, sabemos que existe una sucesión $(\varphi_n)_n \subset C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi_n \to_{n\to\infty} v$ en $H^1(\Omega)$, es decir,

$$\begin{cases} \varphi_n \to_{n\to\infty} v & \text{en } L^2(\Omega) \\ \nabla \varphi_n \to_{n\to\infty} \nabla v & \text{en } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \nabla u (\nabla \varphi_n - \nabla v) dx + \beta \int_{\partial\Omega} u(\varphi_n - v) dS - \int_\Omega f(\varphi_n - v) dx \right| \leq \\ &\|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \varphi_n - \nabla v\|_{L^2} + \left| \beta \int_{\partial\Omega} u(\varphi_n - v) dS \right| + \|f\|_{L^2} \|\varphi_n - v\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Por otro lado, recordemos el operador de traza visto en la Teórica: $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es continuo, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|Tw\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|w\|_{H^1(\Omega)}$, y $Tw = w|_{\partial\Omega}$ si $w \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Luego, por C-S

$$\left| \beta \int_{\partial\Omega} u(\varphi_n - v) dS \right| = \left| \beta \int_{\partial\Omega} TuT(\varphi_n - v) dS \right| \leq \beta C^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi_n - v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Por lo tanto, si tomamos límite cuando $n \to \infty$ en (4), obtenemos (3).

<u>(3) $\Rightarrow$ (2)</u>: Sabemos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\partial\Omega} u v dS = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particular, vale para $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Luego

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \ \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aplicamos Green en el primer término, podemos porque $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, obtenemos

$$-\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f v dx, \ \ \forall; \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega)..$$

Luego $\int_\Omega (\Delta u + f)v = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$, por el ejercicio 12 de la práctica 0, tenemos que $-\Delta u = f$ c.t.p de Ω. Pero como $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u \in C(\Omega)$, tenemos que f es continua y que

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \Omega. \tag{5}$$

Nos falta ver que u cumple las condiciones de borde. Si tomamos $v \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ en (3) y aplicamos Green, obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_\Omega v \Delta u dx + \beta \int_{\partial\Omega} u v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Como $-\Delta u = f$ en Ω, tenemos

$$\int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u \right) dS = 0, \ \ \forall v \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

De acá se deduce que $\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = 0$.

Ahora veamos que existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución del problema (3). Definimos $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\partial\Omega} u v dS,$$

y $\mathcal{L}_f : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{L}_f(v) = \int_\Omega f v dx.$$

Es claro que a es bilineal, veamos que es continua y coersiva.
<u>a es continua:</u> Por C-S y recordando que $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es continuo, tenemos que

$$|a(u, v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\partial\Omega} u v dS \right| = \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \beta \int_{\partial\Omega} T(u) T(v) dS \right| \leq$$
$$\|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \beta \|T(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|T(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq (\beta C^2 + 1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

<u>a es coersiva:</u> Supongamos que no, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u_n, u_n) < \frac{1}{n} \|u_n\|_{H^1}^2.$$

Definimos $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1}}$, así, $a(v_n, v_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $(v_n)_n \subset H^1(\Omega)$ es acotada, existe una subsucesión $(v_{n_k})_k$ y $v \in H^1(\Omega)$ tales que

$$\begin{cases} v_{n_k} \to_{k \to \infty} v & \text{en } L^2, \\ \nabla v_{n_k} \to_{k \to \infty} \nabla v & \text{en } L^2. \end{cases}$$

Entonces

$$a(v_{n_k}, v_{n_k}) = \int_\Omega |\nabla v_{n_k}|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} v_{n_k}^2 dS \to 0,$$

cuando $k \to \infty$. Luego, $\int_\Omega |\nabla v_{n_k}|^2 \, dx \to 0$ y $\int_{\partial\Omega} v_{n_k}^2 dS \to 0$.

Por el Lema de Fatou, sabemos que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \leq \liminf_k \int_\Omega |\nabla v_{n_k}|^2 \, dx = 0,$$

entonces $\nabla v = 0$, como Ω es conexo, $v =$cte.

Como $n_{n_k} \to v$ en L^2 y $\|v_{n_k}\|_{L^2} = 1$, entonces $\|v\|_{L^2} = 1$. Pero por otro lado, por Fatou,

$$\int_{\partial\Omega} v^2 dS \leq \liminf_k \int_{\partial\Omega} v_{n_k}^2 dS = 0,$$

absurdo!

Luego a es coersiva.

Por otro lado, $\mathcal{L}_f$ es lineal y continuo (pues $f \in L^2$). Por Lax-Milgram, existe una única $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = \mathcal{L}_f(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Luego esa u es la única solución de (3).